第 2 节 空间向量的应用：证平行、垂直与求角（★★★）

内容提要

用空间向量求解立体几何问题的步骤比较流程化，常分四步：

①建立空间直角坐标系，写出点的坐标；

②计算直线的方向向量、平面的法向量；

③根据问题，选择合适的公式计算；

④把向量运算的结果翻译成几何问题的答案.

下面归纳一些常见立体几何问题的向量求解方法：

1．证线线平行：如图 1，设l_1，l_2是空间中不重合的两条直线，它们的方向向量分别为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，则$l_1 // l_2$的充要条件是 $\boldsymbol{a} // \boldsymbol{b}$.

2．证线面平行：如图 2，直线 l 不在平面α内，直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{a}$，平面α的法向量为 $\boldsymbol{n}$，则 $l // \alpha$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

3．证面面平行：如图 3，α，β是两个不重合的平面，它们的法向量分别为 $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{m}$，则$\alpha // \beta$的充要条件是 $\boldsymbol{n} // \boldsymbol{m}$.

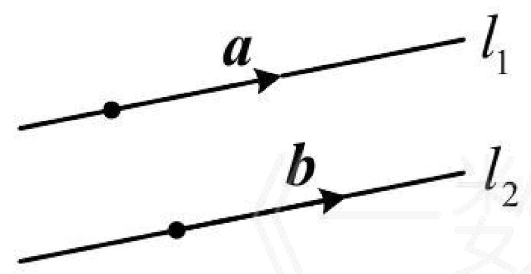


图1

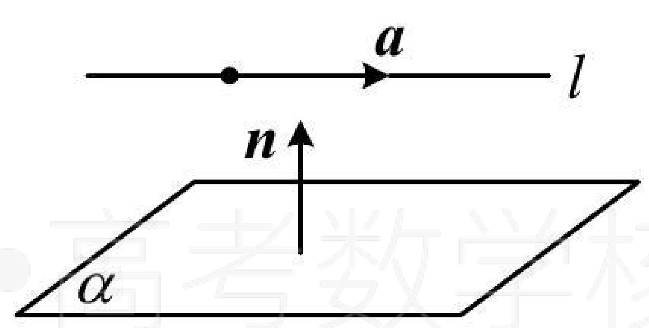


图2

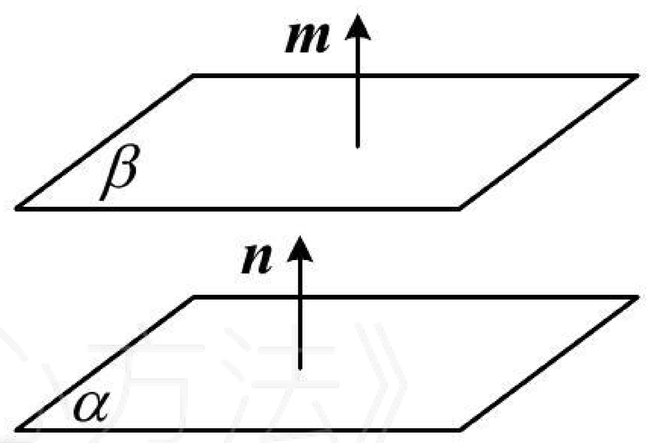


图3

4．证线线垂直：如图 4，设直线l_1，l_2的方向向量分别为 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$，则$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n} \Leftrightarrow \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

5．证线面垂直：如图 5，设 $\boldsymbol{m}$ 为直线 l 的方向向量，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 为平面α内两个不共线的向量，则$l\perp\alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{u}=0$且$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{v}=0$.

6．证面面垂直：如图 6，设 $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{m}$ 分别为平面α，β的法向量，则$\alpha\perp\beta \Leftrightarrow \boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n} \Leftrightarrow \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

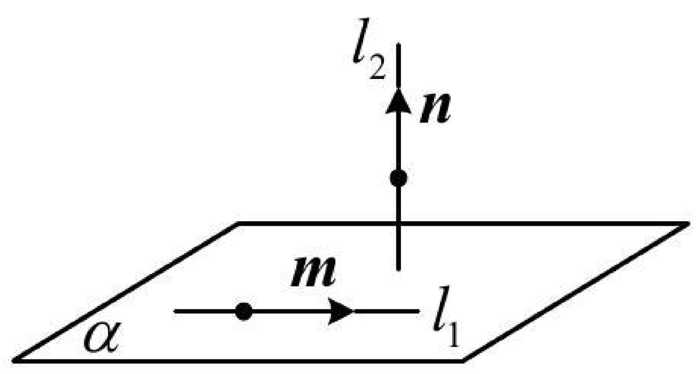


图4

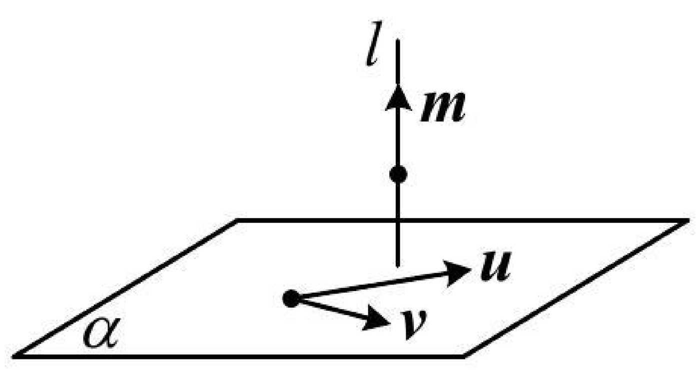


图5

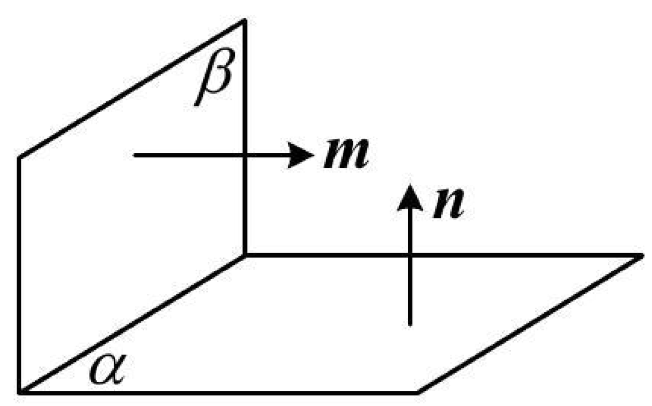


图6

7．求线线角：设l_1，l_2是空间的两条直线，它们的夹角为θ，方向向量分别为 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，则$\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|}$.

8．求线面角：如图 7，设直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{s}$，平面α的法向量为 $\boldsymbol{n}$，l 与α所成角为θ，则$\sin\theta=|\cos<\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}|\cdot|\boldsymbol{n}|}$.

9．求二面角：如图 8，设平面α，β的法向量分别为 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$，则二面角$\alpha-l-\beta$的余弦值$\cos\theta=\pm\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\pm\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}$，若是求$\sin\theta$，可由$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$来算，$\cos\theta$取正取负不影响结果；

若是求$\cos\theta$，最终结果取正还是取负，则需考虑二面角的钝锐，一般可通过观察图形，直观想象来判断；若图形不易判断，则求法向量时，让一个朝内，一个朝外，它们的夹角即为二面角，如图 9.

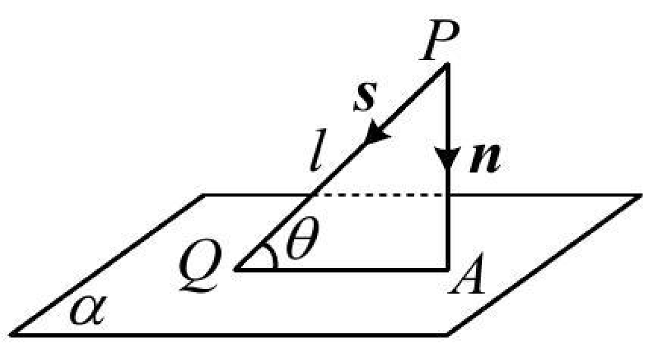


图7

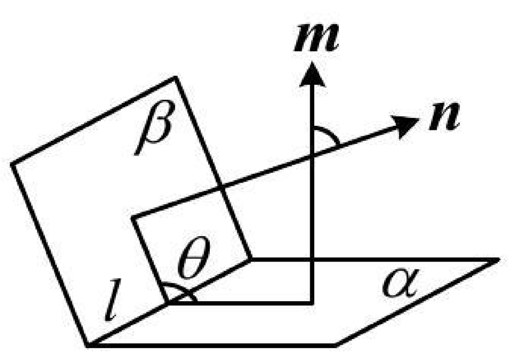


图8

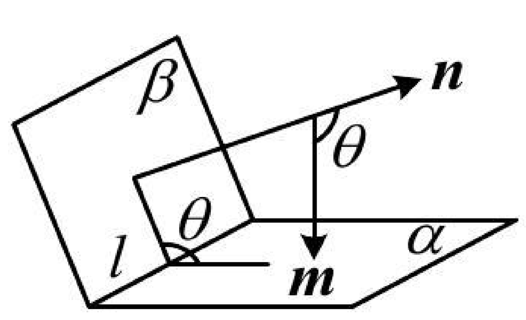


图9

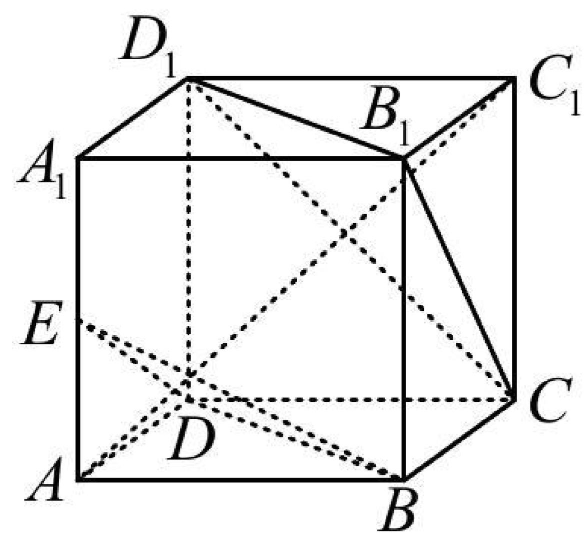
典型例题

类型Ⅰ：用空间向量证平行、垂直

【例 1】（多选）如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E 为AA_1的中点，则以下四个结论中，正确的有（　　）

（A）DB // 平面CB_1D_1　　（B）平面 BDE // 平面CB_1D_1

（C）$AC_1\perp$平面CB_1D_1　　（D）平面$CB_1D_1\perp$平面A_1BC_1



解析： 设正方体的棱长为 2，A 项，判断线面是否平行，就看直线的方向向量与平面的法向量是否垂直，

如图，$D(0,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，$B_1(2,2,2)$，$D_1(0,0,2)$，所以$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{CB_1}=(2,0,2)$，

$\overrightarrow{CD_1}=(0,-2,2)$，设平面$CB_1D_1$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}=2x+2z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD_1}=-2y+2z=0\end{cases}$，令$x=1$可得$\begin{cases}y=-1\\ z=-1\end{cases}$，

所以平面CB_1D_1的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$，因为$\overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{n}=2\times1+2\times(-1)+0\times(-1)=0$，所以$\overrightarrow{DB}\perp\boldsymbol{n}$，从而 DB // 平面CB_1D_1，故 A 项正确；

B 项，判断面面是否平行，就看它们的法向量是否平行，

由图可知，$E(2,0,1)$，所以$\overrightarrow{DE}=(2,0,1)$，设平面 BDE 的法向量为$\boldsymbol{m}=(x',y',z')$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DB}=2x'+2y'=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}=2x'+z'=0\end{cases}$，令$x'=1$，则$\begin{cases}y'=-1\\ z'=-2\end{cases}$，所以$\boldsymbol{m}=(1,-1,-2)$是平面 BDE 的一个法向量，

观察发现 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 不平行，所以平面 BDE 与平面CB_1D_1不平行，故 B 项错误；

C 项，判断线面是否垂直，就看直线的方向向量与平面的法向量是否平行，由图可知，$A(2,0,0)$，$C_1(0,2,2)$，

所以$\overrightarrow{AC_1}=(-2,2,2)=-2\boldsymbol{n}$，故$\overrightarrow{AC_1}$ // $\boldsymbol{n}$，所以$AC_1\perp$平面CB_1D_1，故 C 项正确；

D 项，判断面面是否垂直，就看两平面的法向量是否垂直，

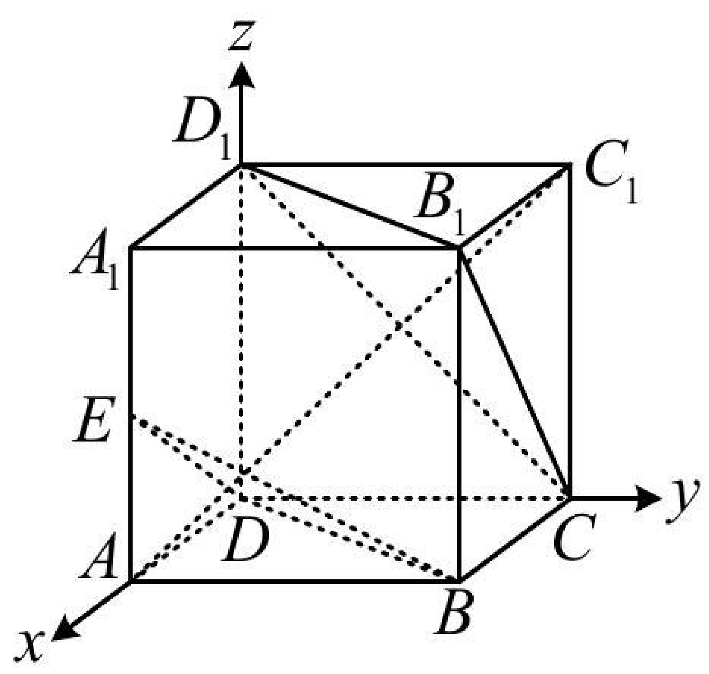
由图可知，$A_1(2,0,2)$，$B(2,2,0)$，$C_1(0,2,2)$，所以$\overrightarrow{A_1B}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(-2,2,0)$，

设平面 A_1BC_1 的法向量为 $\boldsymbol{p}=(x'',y'',z'')$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{A_1B}=2y''-2z''=0\\ \boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=-2x''+2y''=0\end{cases}$，令 $x''=1$，则 $\begin{cases}y''=1\\ z''=1\end{cases}$，

所以 $\boldsymbol{p}=(1,1,1)$ 是平面 A_1BC_1 的一个法向量，因为 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{n}=1\times1+1\times(-1)+1\times(-1)=-1\neq0$，

所以平面 A_1BC_1 与平面 CB_1D_1 不垂直，故 D 项错误.

答案： AC



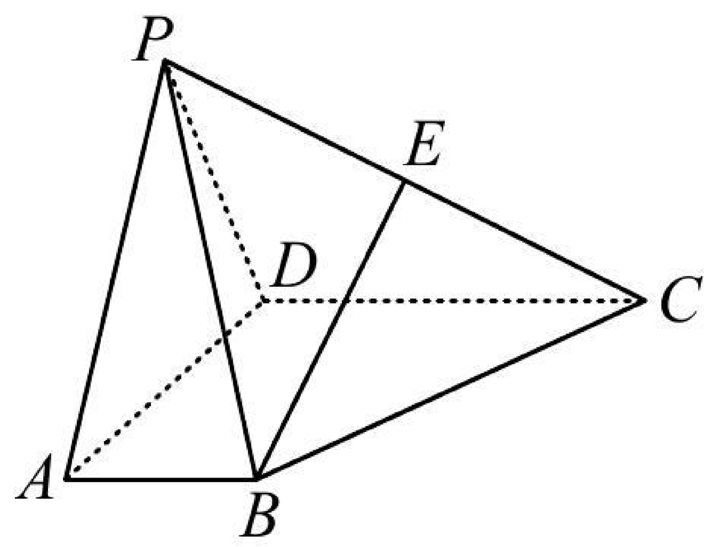
【反思】当图形方便建系时，我们常建立空间直角坐标系，将几何问题转化为向量问题来求解；建系证平行、垂直一般作为想不到几何法时的备选方案，故只举 1 道例题，帮大家熟悉有关问题的向量方法.

类型Ⅱ：用空间向量求线面角

【例 2】如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是梯形，$AB\parallel CD$，$AD\perp CD$，$CD=2AB=4$，ΔPAD 是正三角形，E 是棱 PC 的中点.

（1）证明：$BE\parallel$ 平面 PAD；

（2）若 $AD=2\sqrt{3}$，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，求直线 AB 与平面 PBC 所成角的正弦值.



解：（1）（先在面 PAD 内过 A 作 BE 的平行线，作出来就发现构成的图形像平行四边形）

如图，取 PD 中点 F，连接 AF，EF，因为 E 为 PC 的中点，所以 $EF\parallel CD$ 且 $EF=\dfrac{1}{2}CD$，

又由题意，$AB\parallel CD$ 且 $CD=2AB$，所以 $AB=\dfrac{1}{2}CD$，故 $EF\parallel AB$ 且 $EF=AB$，

所以四边形 $ABEF$ 是平行四边形，故 $BE\parallel AF$，因为 $BE\not\subset$ 平面 PAD，$AF\subset$ 平面 PAD，所以 $BE\parallel$ 平面 PAD.

（2）（条件中有面面垂直，可通过作交线的垂线找到线面垂直，再建系处理）

如图，取 AD 中点 G，连接 PG，因为 ΔPAD 是正三角形，所以 $PG\perp AD$，

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PG\subset$ 平面 PAD，所以 $PG\perp$ 平面 $ABCD$，

以 G 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，因为 $AD=2\sqrt{3}$，所以 $PG=2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$，

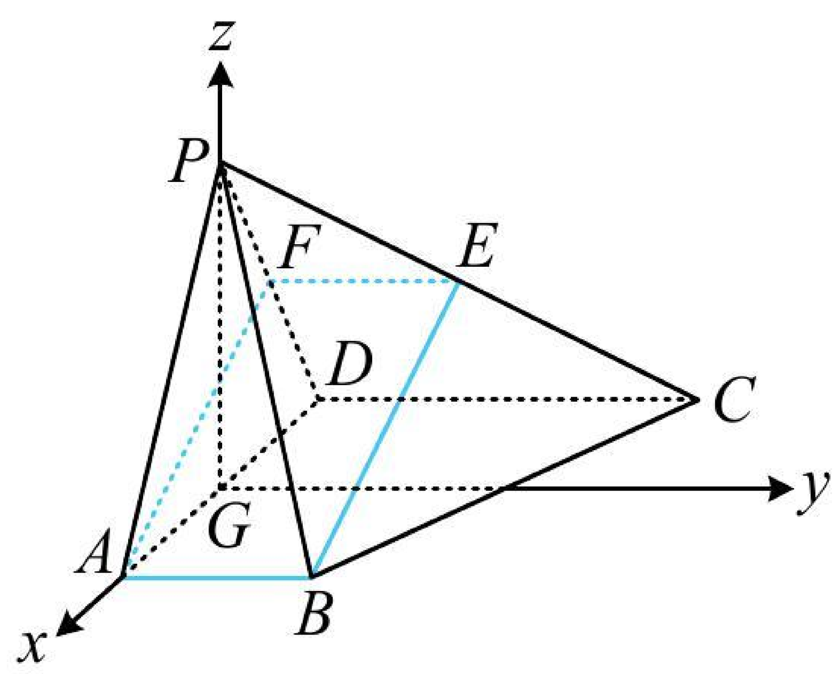
（要算线面角，可代内容提要第 8 点的公式，先求直线的方向向量和平面的法向量）

$A(\sqrt{3},0,0)$，$B(\sqrt{3},2,0)$，$P(0,0,3)$，$C(-\sqrt{3},4,0)$，所以 $\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{PB}=(\sqrt{3},2,-3)$，$\overrightarrow{BC}=(-2\sqrt{3},2,0)$，

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=\sqrt{3}x+2y-3z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-2\sqrt{3}x+2y=0\end{cases}$，令 $x=1$，则 $\begin{cases}y=\sqrt{3}\\ z=\sqrt{3}\end{cases}$，

所以 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$ 是平面 PBC 的一个法向量，因为 $\left|\cos<\overrightarrow{AB},\boldsymbol{n}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\boldsymbol{n}\right|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

所以直线 AB 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.



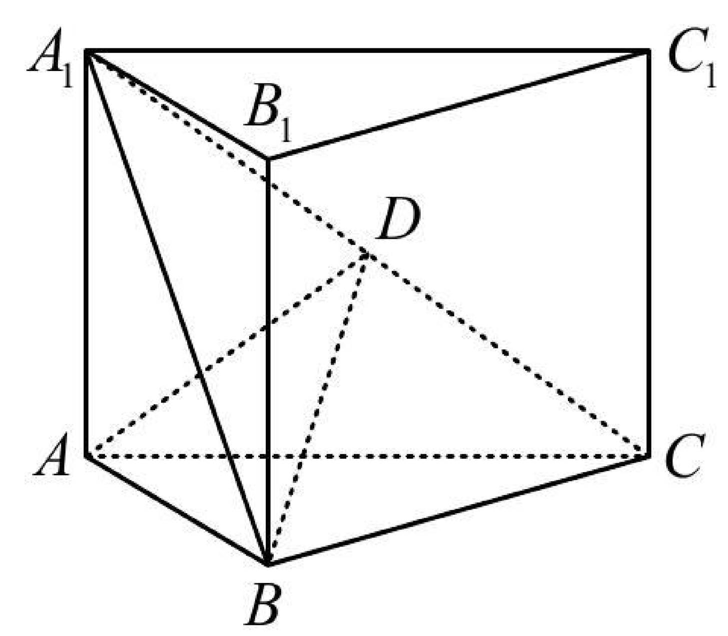
【反思】算线面角 θ 时，由于 $0^\circ\le\theta\le 90^\circ$，所以 $\sin\theta\ge 0$，故别忘了在夹角余弦公式上加绝对值.

类型III：用空间向量求二面角

【例 3】（2022·新高考Ⅰ卷）如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4，ΔA_1BC 的面积为 $2\sqrt{2}$.

（1）求点 A 到平面 A_1BC 的距离；

（2）设 D 为 A_1C 的中点，$AA_1=AB$，平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，求二面角 $A-BD-C$ 的正弦值.



解：（1）（ΔABC 的数据没给，不便建系，而条件中有 ΔA_1BC 的面积，与所求距离合在一起可算三棱锥 $A-A_1BC$ 的体积，该三棱锥的体积又可由给出的三棱柱体积求出，故可建立方程求得目标）

记 ΔABC 的面积为 S，点 A_1 到平面 ABC 的距离为 h，则三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积 $V=Sh=4$，

所以三棱锥 A_1-ABC 的体积 $V_{A_1-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot h=\dfrac{1}{3}Sh=\dfrac{4}{3}$，

另一方面，设所求距离为 d，则 $V_{A-A_1BC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta A_1BC}\cdot d=\dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{2}\times d=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}d$，

因为 $V_{A_1-ABC}=V_{A-A_1BC}$，所以 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}d=\dfrac{4}{3}$，解得：$d=\sqrt{2}$，故点 A 到平面 A_1BC 的距离为 $\sqrt{2}$.

（2）（看图可猜想 $AB\perp BC$，若能证出它，即可建系，故尝试找理由，发现条件中有面面垂直，想到作交线的垂线，构造线面垂直，由 $AA_1=AB$ 知 ABB_1A_1 是正方形，AB_1 就与交线 A_1B 垂直，思路浮现）

如图，连接 AB_1 交 A_1B 于 O，由 $AA_1=AB$ 和 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱知 ABB_1A_1 是正方形，故 $AO\perp A_1B$，又平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，平面 $A_1BC\cap$ 平面 $ABB_1A_1=A_1B$，$AO\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $AO\perp$ 平面 A_1BC，因为 $BC\subset$ 平面 A_1BC，所以 $BC\perp AO$，又 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，所以 $BB_1\perp$ 平面 ABC，

而 $BC\subset$ 平面 ABC，所以 $BC\perp BB_1$，因为 AO，$BB_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，$AO\cap BB_1=B_1$，所以 $BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，又 A_1B，$AB\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $BC\perp A_1B$，$BC\perp AB$，故 AB，BC，BB_1 两两垂直，

（题干没给棱长，需先求出棱长，才能建系写坐标，可设出棱长，用题干的体积、面积来建立方程）

设 $AB=a$，$BC=b$，则 $AA_1=a$，$A_1B=\sqrt{2}a$，由题意，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积 $V=\dfrac{1}{2}a^2b=4$，

$S_{\Delta A_1BC}=\dfrac{1}{2}A_1B\cdot BC=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}a\times b=2\sqrt{2}$，解得：$a=b=2$，

以 B 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(0,2,0)$，$B(0,0,0)$，$C(2,0,0)$，$D(1,1,1)$，

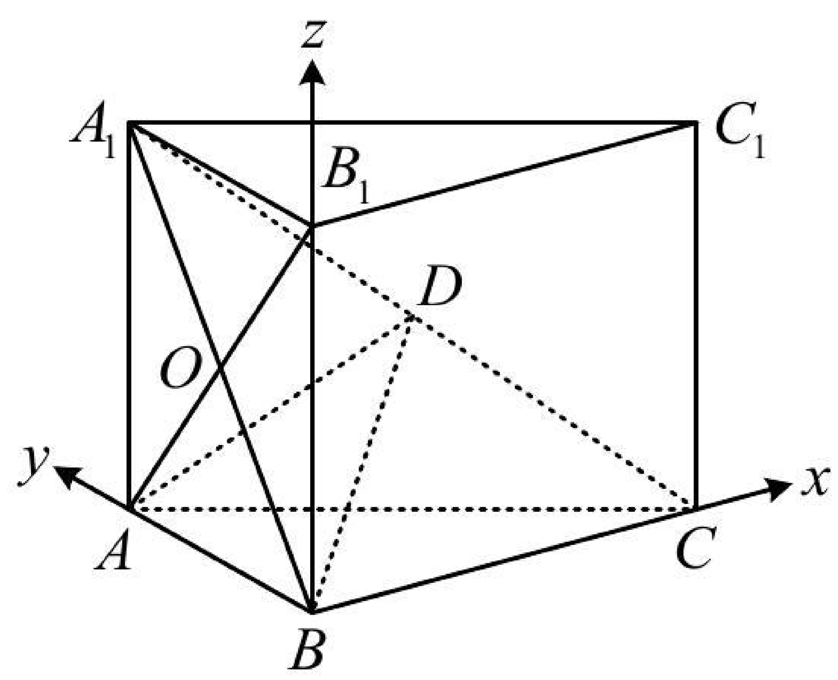
所以 $\overrightarrow{BA}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BD}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{BC}=(2,0,0)$，

设平面 ABD 和平面 BCD 的法向量分别为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BA}=2y_1=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=x_1+y_1+z_1=0\end{cases}$，令 $x_1=1$，则 $\begin{cases}y_1=0\\ z_1=-1\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{m}=(1,0,-1)$ 是平面 ABD 的一个法向量，

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=x_2+y_2+z_2=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=2x_2=0\end{cases}$，令 $y_2=1$，则 $\begin{cases}x_2=0\\ z_2=-1\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{n}=(0,1,-1)$ 是平面 BCD 的一个法向量，

从而 $|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{2}$，故二面角 $A-BD-C$ 的正弦值为 $\sqrt{1-(\dfrac{1}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

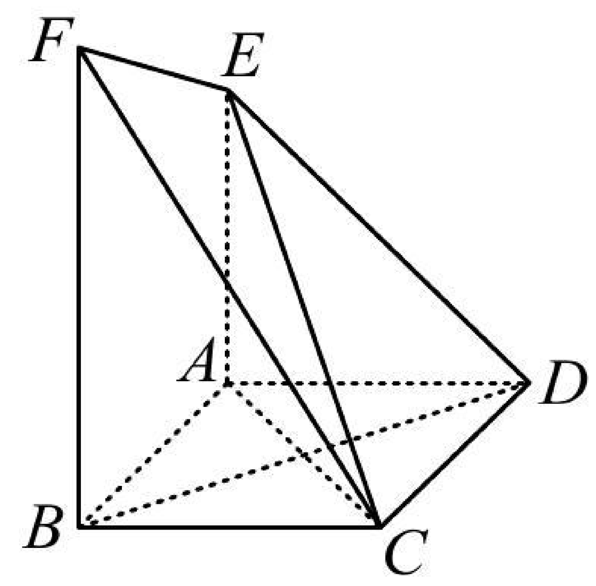


【反思】①本题几何部分用到了多种技巧，综合性较强，所以前面的几何法要学扎实，一旦顺利建系，后续求二面角则是流程化的操作；②若是求二面角的正弦值，则无需考虑二面角的钝锐，正弦都为正.

【例 4】如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=60^{\circ}$，平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$，$AE\,/\!/\,BF$，$AD=AE=2$，$DE=2\sqrt{2}$.

（1）证明：$BD\perp$ 平面 ACE；

（2）若平面 CEF 与平面 $ABFE$ 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$，求 BF 的长.



解：(1)（证线面垂直，需在面内找线，$BD \perp AC$ 容易看出，而由图可猜想 $AE \perp$ 平面 $ABCD$，故另一条选 AE）

由题意，$AE^2 + AD^2 = 8 = DE^2$，所以 $AE \perp AD$，又平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD$，平面 $ADE \cap$ 平面 $ABCD = AD$，$AE \subset$ 平面 ADE，所以 $AE \perp$ 平面 $ABCD$，因为 $BD \subset$ 平面 $ABCD$，所以 $BD \perp AE$，

又四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $BD \perp AC$，因为 AE，$AC \subset$ 平面 ACE，$AE \cap AC = A$，所以 $BD \perp$ 平面 ACE.

(2)（第 1 问已证出了 $AE \perp$ 平面 $ABCD$，第 2 问可直接建系）取 CD 中点 G，连接 AG，

因为四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC = 60^\circ$，所以 ΔABC 和 ΔACD 都是正三角形，

故 $AG \perp CD$，又 $AB // CD$，所以 $AG \perp AB$，结合 $AE \perp$ 平面 $ABCD$ 可得 AE，AB，AG 两两垂直，

以 A 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，设 $BF = a(a > 0)$，则 $C(1, \sqrt{3}, 0)$，$E(0,0,2)$，$F(2,0,a)$，

所以 $\overrightarrow{CE} = (-1, -\sqrt{3}, 2)$，$\overrightarrow{CF} = (1, -\sqrt{3}, a)$，设平面 CEF 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{CE} = -x - \sqrt{3}y + 2z = 0 \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{CF} = x - \sqrt{3}y + az = 0 \end{cases}$，两式相减得：$-2x + (2-a)z = 0$，

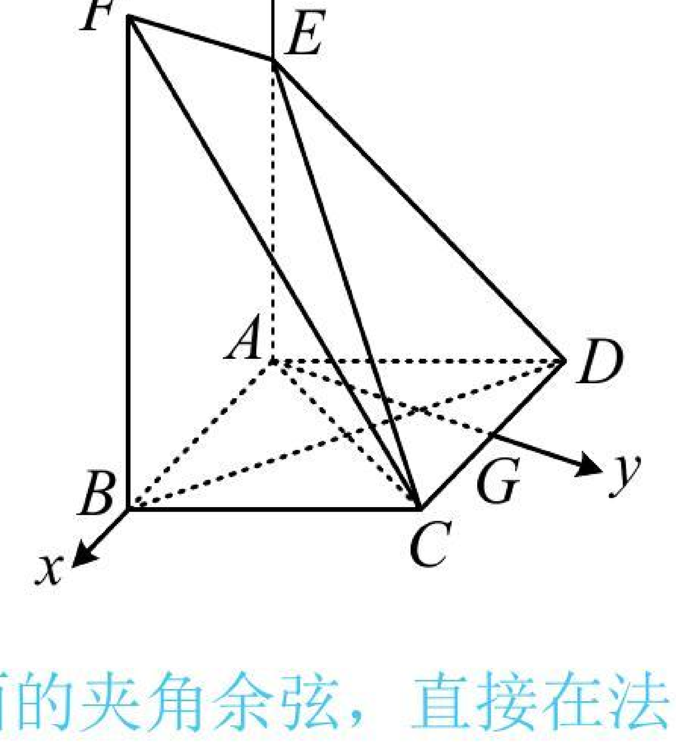
令 $x = 2 - a$，则 $z = 2$，代入原方程组可得 $y = \dfrac{2+a}{\sqrt{3}}$，

（为了便于后续计算，我们把求得的 x，y，z 同乘以 $\sqrt{3}$ 去分母）

所以 $\boldsymbol{n} = (\sqrt{3}(2-a), 2+a, 2\sqrt{3})$ 是平面 CEF 的一个法向量，由图可知 $AG \perp$ 平面 $ABFE$，

所以 $\overrightarrow{AG} = (0, \sqrt{3}, 0)$ 是平面 $ABFE$ 的一个法向量，因为平面 CEF 与平面 $ABFE$ 的夹角余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$，

所以 $\left|\cos < \overrightarrow{AG}, \boldsymbol{n} >\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{AG} \cdot \boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AG}\right| \cdot |\boldsymbol{n}|} = \dfrac{\sqrt{3}(2+a)}{\sqrt{3(2-a)^2 + (2+a)^2 + 12} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$，解得：$a = 3$，故 $BF = 3$.



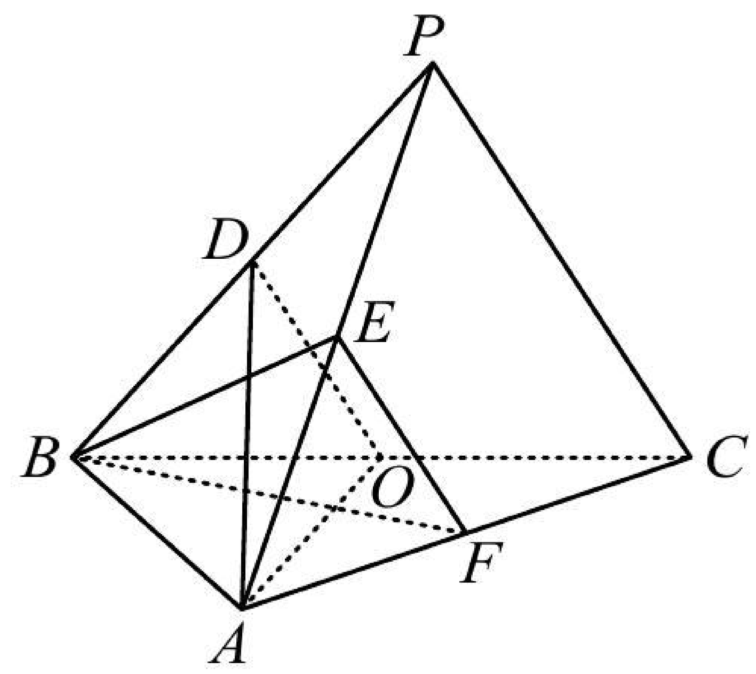
【反思】两个平面（不考虑平行和垂直的情况）的夹角一定是锐角，所以计算面面的夹角余弦，直接在法向量的夹角余弦上取绝对值.

【变式】（2023·全国乙卷）在三棱锥$P-ABC$中，$AB\perp BC$，$AB=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$PB=PC=\sqrt{6}$，BP，AP，BC的中点分别为D，E，O，$AD=\sqrt{5}DO$，点F在AC上，$BF\perp AO$.

（1）证明：EF∥平面ADO;

（2）证明：平面$ADO\perp$平面BEF;

（3）求二面角$D-AO-C$的大小.



解：（1）（由图可猜想$DEFO$是平行四边形，故尝试证DE平行且等于OF. 注意到D，E，O都是所在棱的中点，故若能证出F是中点，则DE，OF都平行且等于AB的一半，问题就解决了. 那F的位置由哪个条件决定呢？显然是$BF\perp AO$，于是我们到ΔABC中来进行分析）

如图1，在ΔABC中，因为$BF\perp AO$，$AB\perp BC$，所以$\angle 2+\angle AOB=\angle 1+\angle AOB=90^\circ$，故$\angle 1=\angle 2$ ①，

又$AB=2$，$BC=2\sqrt{2}$，O为BC中点，所以$BO=\sqrt{2}$，故$\tan\angle 1=\dfrac{BO}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan\angle 3=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$\tan\angle 1=\tan\angle 3$，故$\angle 1=\angle 3$，结合①可得$\angle 2=\angle 3$，所以$BF=CF$，

连接OF，因为O是BC中点，所以$OF\perp BC$，又$AB\perp BC$，所以OF∥AB，

结合O为BC中点可得F为AC的中点，又D，E，O分别是BP，AP，BC的中点，

所以DE和OF都平行且等于AB的一半，故DE平行且等于OF，

所以四边形$DOFE$是平行四边形，故EF∥DO，

因为$EF\not\subset$平面ADO，$DO\subset$平面ADO，所以EF∥平面ADO.

（2）（要证面面垂直，先找线面垂直，条件中有$AO\perp BF$，于是不外乎考虑证$AO\perp$面BEF或证$BF\perp$面AOD，怎样选择呢？此时我们再看其他条件，还没用过的条件就是一些长度，长度类条件用于证垂直，想到勾股定理，我们先分析有关线段的长度）

由题意，$DO=\dfrac{1}{2}PC=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$AD=\sqrt{5}DO=\dfrac{\sqrt{30}}{2}$，$AO=\sqrt{AB^2+OB^2}=\sqrt{6}$，

所以$AO^2+DO^2=\dfrac{15}{2}=AD^2$，故$AO\perp OD$，（此时结合$OD$∥$EF$我们发现可以证明$AO\perp$面$BEF$）

由（1）可得EF∥OD，所以$AO\perp EF$，又$AO\perp BF$，且BF，EF是平面BEF内的相交直线，

所以$AO\perp$平面BEF，因为$AO\subset$平面ADO，所以平面$ADO\perp$平面BEF.

（3）（此图让我们感觉面$PBC\perp$面ABC，若这一感觉正确，那建系处理就很方便. 我们先分析看是不是这样的. 假设面$PBC\perp$面ABC，由于$AB\perp BC$，于是$AB\perp$面PBC，故$AB\perp BD$，但我们只要稍加计算，就会发现$AB^2+BD^2\ne AD^2$，矛盾，所以我们的感觉是不对的，那么P的坐标就不好找，怎么办呢？此时我们可以设P的坐标，用已知的长度条件来建立方程组，直接求解P的坐标）

以 B 为原点建立如图 2 所示的空间直角坐标系，则 $B(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$C(0,2\sqrt{2},0)$，$O(0,\sqrt{2},0)$，

设 $P(x,y,z)(z>0)$，则 $D(\frac{x}{2},\frac{y}{2},\frac{z}{2})$，由 $\begin{cases}PB=\sqrt{6}\\PC=\sqrt{6}\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x^2+(y-2\sqrt{2})^2+z^2=6\end{cases}$，解得：$y=\sqrt{2}$，

代回两方程中的任意一个可得 $x^2+z^2=4$ ②，（此时发现还有 $AD=\sqrt{5}DO$ 这个条件没用，故翻译它）

又 $AD=\sqrt{5}DO$，所以 $(\frac{x}{2}-2)^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=5[\frac{x^2}{4}+(\frac{y}{2}-\sqrt{2})^2+\frac{z^2}{4}]$，

将 $y=\sqrt{2}$ 代入整理得：$x^2+z^2+2x-2=0$ ③，

联立②③结合 $z>0$ 解得：$x=-1$，$z=\sqrt{3}$，（到此本题的主要难点就攻克了，接下来是流程化的计算）

所以 $D(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，故 $\overrightarrow{DO}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{AO}=(-2,\sqrt{2},0)$，

设平面 AOD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DO}=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AO}=-2x+\sqrt{2}y=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $\begin{cases}y=\sqrt{2}\\z=\sqrt{3}\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$ 是平面 AOD 的一个法向量，

由图可知 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$ 是平面 AOC 的一个法向量，所以 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

由图可知二面角 $D-AO-C$ 为钝角，故其大小为 135°.

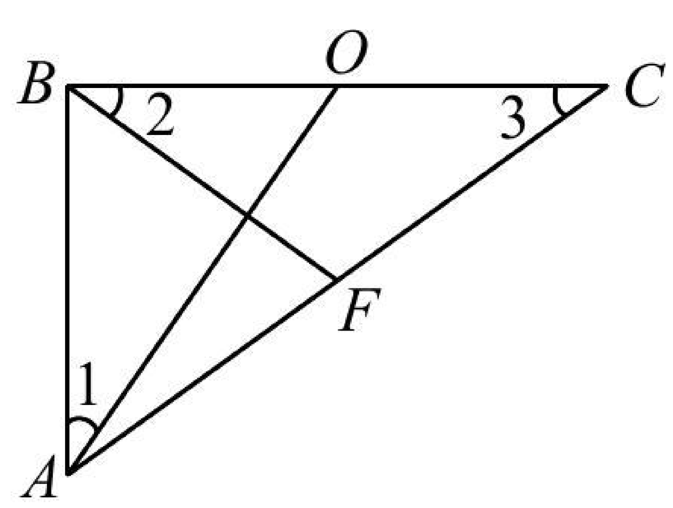


图1

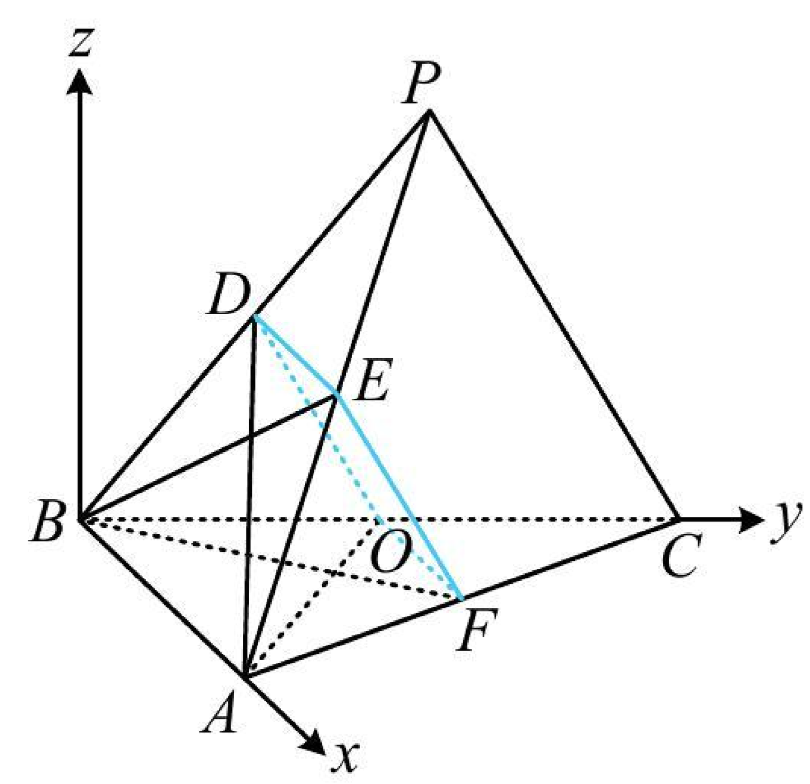


图2

【反思】①若由图能看出二面角的钝锐，则直接看图决定怎样取值；否则可将法向量取成一个朝内，一个朝外，它们的夹角即为二面角；②通过本题我们给出了一种额外的找坐标思路，即当建系后有点的坐标不好找时，可直接设其坐标，翻译已知的各种条件（本题是长度）建立方程组，求解该坐标.

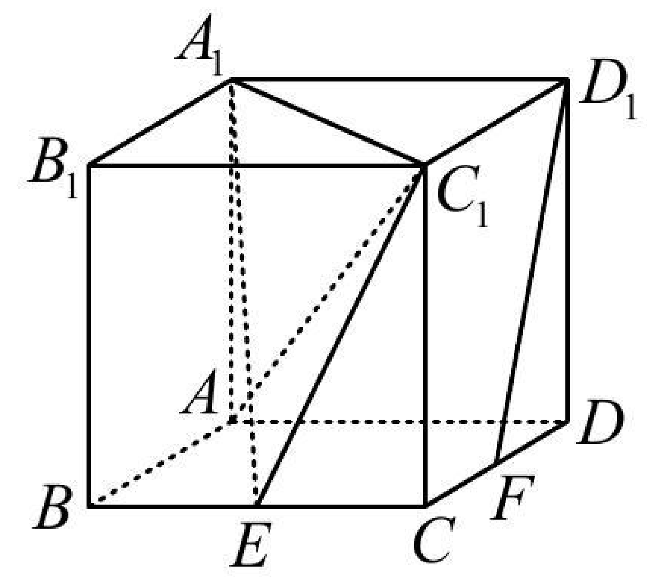
强化训练

1．（2021 • 天津卷 • ★★）如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为棱 BC，CD 的中点.

（1）求证：D_1F // 平面 A_1EC_1；

（2）求直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角的正弦值；

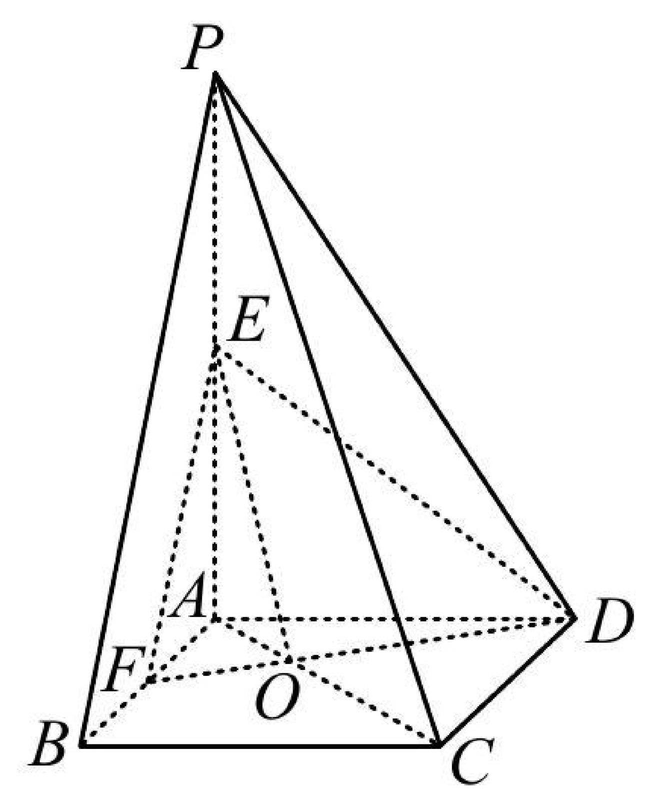
（3）求二面角 $A-A_1C_1-E$ 的正弦值.



2．（2022 • 山东模拟 • ★★★）如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为正方形，$AB=2$，$AP=3$，直线$PA\perp$平面$ABCD$，E，F分别为PA，AB的中点，直线AC与DF相交于点O.

（1）证明：OE与CD不垂直；

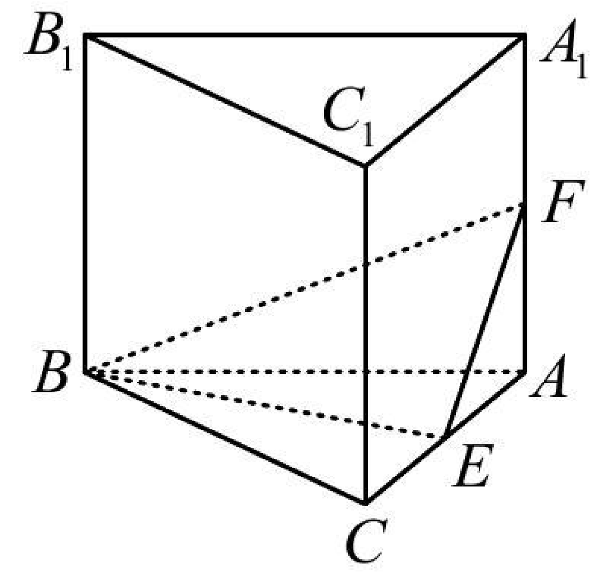
（2）求二面角$B-PC-D$的余弦值.



3.（2023·山东模拟·★★★）如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，E，F 分别是线段 AC，AA_1 的中点，$\angle BCA=\angle BAC$.

（1）求证：平面 $BEF\perp$ 平面 ACC_1A_1；

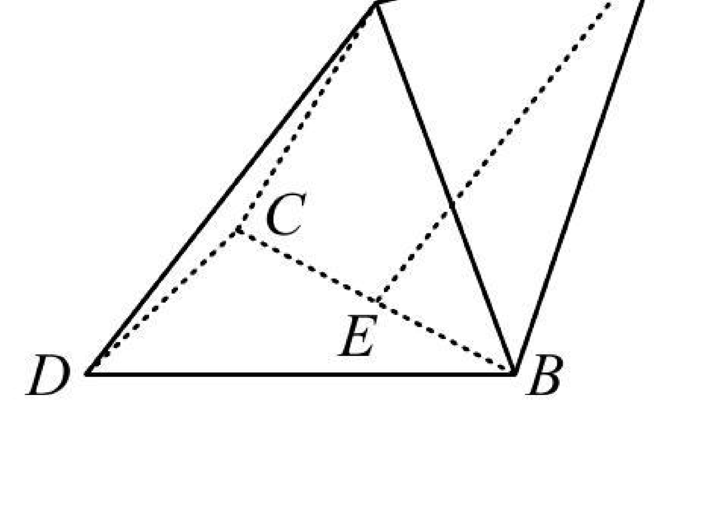
（2）若 $\cos\angle ACB=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，且二面角 $A-BF-E$ 的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$，求 $\dfrac{AA_1}{AC}$ 的值.



4.（2023•新高考Ⅱ卷•★★★）如图，三棱锥 $A-BCD$ 中，$DA=DB=DC$，$BD\perp CD$，$\angle ADB=\angle ADC=60^\circ$，$E$ 为 BC 的中点.

（1）证明：$BC\perp DA$；

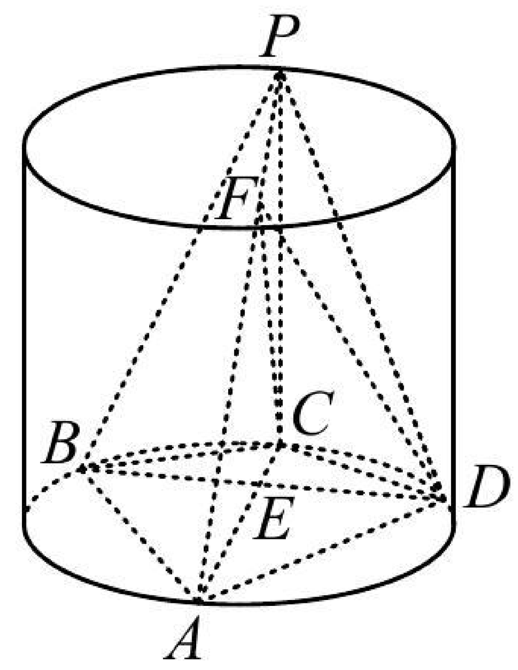
（2）点 F 满足 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$，求二面角 $D-AB-F$ 的正弦值.



5．（2023 • 四省联考 • ★★★）如图，四边形 $ABCD$ 是圆柱底面的内接四边形，AC 是圆柱的底面直径，PC 是圆柱的母线，E 是 AC 与 BD 的交点，$AB=AD$，$\angle BAD=60^{\circ}$.

（1）记圆柱的体积为 V_1，四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 V_2，求 $\dfrac{V_1}{V_2}$；

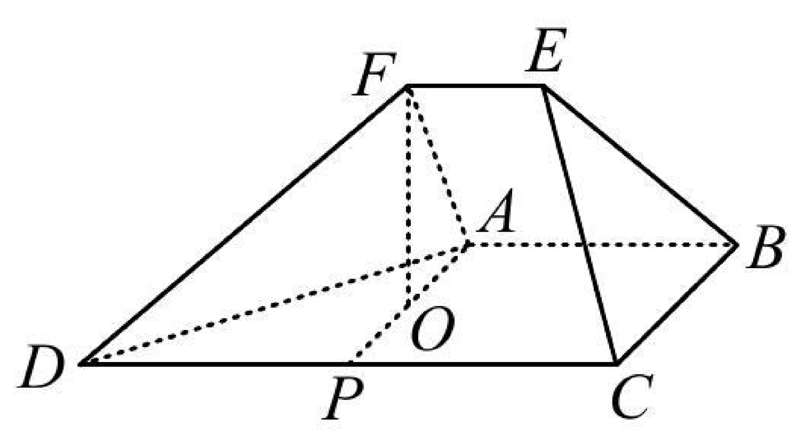
（2）设点 F 在线段 AP 上，且 $PA=4PF$，$PC=4CE$，求二面角 $F-CD-P$ 的余弦值.



6．（2023 • 宜宾模拟 • ★★★★）如图，在五面体 $ABCDEF$ 中，$AB /\!/ CD /\!/ EF$，$\angle ABC=\angle BAF=90^{\circ}$，$CD=2AB=4EF=4$，$BC=AF=2$，$P$，$O$ 分别为 CD，AP 的中点，二面角 $F-AB-D$ 的大小为 60°.

（1）证明：$FO\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）求平面 ADF 与平面 BCE 所成二面角的正弦值.



7．（2023 • 深圳模拟 • ★★★★）在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，侧面 ADD_1A_1 为菱形，且平面 $ADD_1A_1\perp$ 平面 $ABCD$.

（1）证明：$AD_1\perp A_1C$；

（2）设点 P 在棱 A_1B_1 上运动，若 $\angle A_1AD=\dfrac{\pi}{3}$，且 $AB=2$，记直线 AD_1 与平面 PBC 所成的角为 θ，当 $\sin\theta=\dfrac{1}{4}$ 时，求 A_1P 的长度.